ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ FIZIKE 2023/2024

Srednje škole 4. grupa

Rješenja i upute za bodovanje

VAŽNO: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak drukčijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

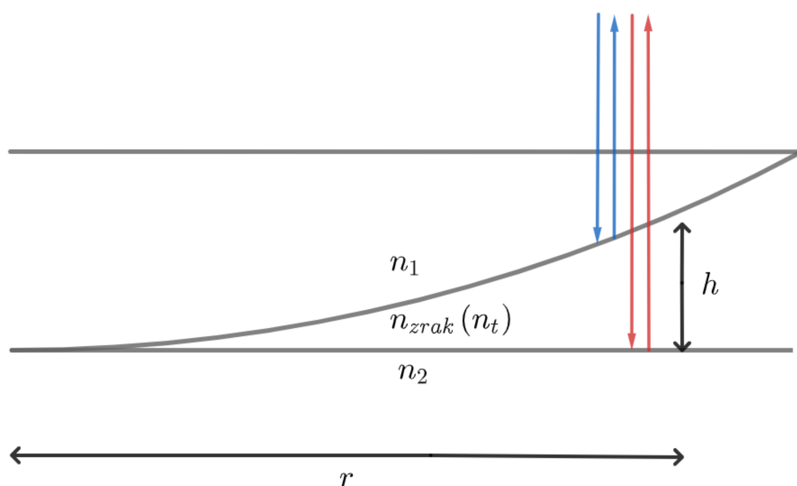
1. zadatak *(10 bodova)*

Interferencija se događa na tankom sloju između optičkih ploča kao što je prikazano na donjoj slici. Kada se optički sustav nalazi u zraku optička razlika puteva plave i crvene zrake iznosi:

$$x = 2h + \frac{\lambda}{2} = \frac{r^2}{1\,\mathrm{m}} + \frac{\lambda}{2}, \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{1}$$

gdje se $\lambda/2$ javlja zbog refleksije crvene zrake na gušćem sredstvu ($n_2 > n_{zrak}$). Uvjet konstruktivne interferencije $x = k\lambda$ je tada ostvaren za radijuse:

$$r_k = \sqrt{\lambda\left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot 1\,\mathrm{m}}, \;\; k = 1,\, 2,\, 3, ... \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{2}$$



Uronimo li optički sustav u tekućinu nepoznatog indeksa loma postoje dvije mogućnosti. Prva je da je $n_t < n_2$ ili $n_t > n_1$. Tada jedna od promatranih zraka doživi refleksiju na gušćem sredstvu pa slijedi:

$$r_k^t = \sqrt{\frac{\lambda\left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot 1\,\mathrm{m}}{n_t}}, \;\; k = 1,\, 2,\, 3, ... \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{3}$$

Očito se u tom slučaju radijusi svijetlih prstena smanje za faktor $1/\sqrt{n}$ što ne odgovara uvjetima zadatka ([**1 bod**]). **Ako formula (3) nije eksplicitno navedena, svejedno dodijeliti bod za nju ako je očito da je donesen ispravan zaključak**.

Drugi slučaj je kada je $n_2 < n_t < n_1$. Tada nijedna zraka ne doživljava refleksiju na gušćem sredstvu, pa za radijuse svjetlih prstena vrijedi:

$$r_k^t = \sqrt{\frac{k\lambda \cdot 1\,\mathrm{m}}{n_t}}, \;\; k = 1,\, 2,\, 3, ... \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{4}$$

Označimo li promjene radijusa prvog i desetog svijetlog prstena sa Δr_1 i Δr_{10} vrijedi:

$$\Delta r_1 = \sqrt{\lambda \cdot 1\,\mathrm{m}}\left(\sqrt{\frac{1}{n_t}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right), \tag{5}$$

$$\Delta r_{10} = \sqrt{\lambda \cdot 1\,\mathrm{m}}\left(\sqrt{\frac{10}{n_t}} - \sqrt{\frac{19}{2}}\right). \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{6}$$

Možemo uvesti pokratu $u = \sqrt{1/n_t}$. Tada dijeljenjem (5) sa (6) i sređivanjem slijedi:

$$u = \frac{\Delta r_1\sqrt{\frac{19}{2}} - \Delta r_{10}\sqrt{\frac{1}{2}}}{\Delta r_1\sqrt{10} - \Delta r_{10}} = 0.863. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{7}$$

Indeks loma tekućine je:

$$n_t = \frac{1}{u^2} = 1.34. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{8}$$

Valnu duljinu upadnog zračenja možemo dobiti npr. iz (5):

$$\lambda = \left[\frac{\Delta r_1}{\left(\sqrt{\frac{1}{n_t}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right]^2 \cdot 1\,\mathrm{m}^{-1} = 643\,\mathrm{nm}. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{9}$$

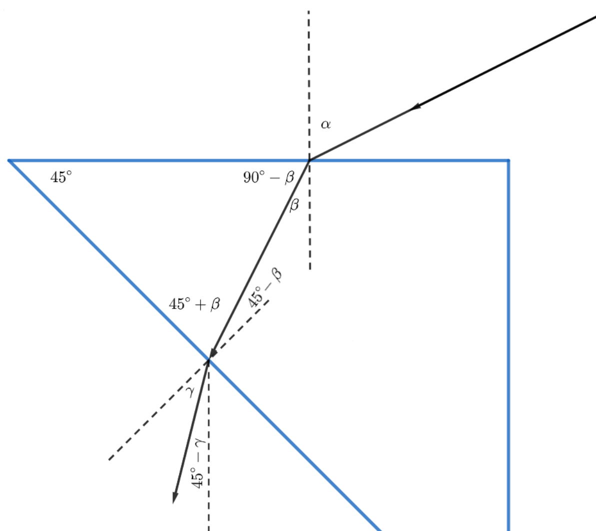
2. zadatak *(10 bodova)*

a.) Zbog dvostrukog loma svjetlosti na prizmi dolazi do razlaganje bijele svjetlosti na komponente. Za prvi lom svjetlosti, korištenjem Snellovog zakona dobivamo :

$$\sin\alpha = n\sin\beta. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{10}$$

Uz malo geometrije (vidi donju sliku) slijedi da je upadni kut za drugi lom jednak $45° - \beta$. Tada je izlazni kut u odnosu na okomicu stranice prizme dan sa:

$$\sin\gamma = n\sin(45° - \beta) \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{11}$$



Kut između okomice na zastor i zrake je onda $45° - \gamma$. S obzirom da su dimenzije prizme zanemarive naspram udaljenosti prizme od zastora, horizontalni pomak zrake od upada na prvu plohu prizme do upada na zastor je jednostavno:

$$\Delta x = h \cdot \sin(45° - \gamma), \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{12}$$

gdje je h udaljenost prizme od zastora.

Uzimajući vrijednosti indeksa loma za rubne dijelove spektra dobivamo:

$$\beta_c = 32.428^\circ,\ \beta_{lj} = 31.8097^\circ \ \Rightarrow\ \gamma_c = 20.581^\circ,\ \gamma_{lj} = 22.0187^\circ. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{13}$$

Širina spektra na zastoru je tada:

$$D = h\left[\sin(45^\circ - \gamma_c) - \sin(45^\circ - \gamma_{lj})\right] = 5.74\,\mathrm{cm} \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{14}$$

b.) Svjetlost ne dopire do zastora kada se za sve valne duljine u vidljivom spektru javlja totalna refleksija za drugi lom svjetlosti na prizmi. Dakle, zastor je taman kada vrijedi:

$$\left|n\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)\right| > 1,\ \Rightarrow\ -\frac{1}{n} > \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \ \vee\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) > \frac{1}{n}. \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{15}$$

S obzirom da je $\sin x$ rastuća funkcija za $-\pi/2 < x < \pi/2$ slijedi:

$$-\arcsin\frac{1}{n} > 45^\circ - \beta \ \vee\ 45^\circ - \beta > \arcsin\frac{1}{n}. \tag{16}$$

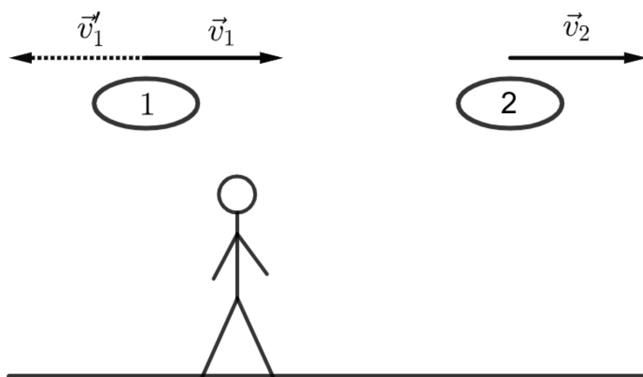
Preuređivanjem i korištenjem (10) dobivamo:

$$n\sin\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{1}{n}\right) < \sin\alpha \ \vee\ \sin\alpha < n\sin\left(\frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{n}\right). \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{17}$$

Ubacivanjem vrijednosti za indekse loma rubova vidljivog spektra slijedi da prvi uvjet nije zadovoljen, a drugi uvjet daje $\alpha < 10.9304^\circ$ za $n = 1.615$, odnosno $\alpha < 12.3978^\circ$ za $n = 1.643$. Dakle, zastor je potpuno taman za upadne kuteve $\alpha < 10.9304^\circ$. [**1 bod**]
S obzirom da u generalnom slučaju prvi uvjet može biti zadovoljen (npr. za druge vrijednosti indeksa loma ili kuta prizme), rješenje koje ne sadrži provjeru tog (ili ekvivalentnog uvjeta) ili argumentaciju koja isključuje potrebu za provjerom, nije potpuno. Sukladno tome se ne može dodijeliti 1 bod predviđen za taj uvjet u jedn. (15).

3. zadatak *(10 bodova)*

a.) Na donjoj slici prikazana su dva moguća slučaja. Bez smanjenja općenitosti uzeli smo da se brod 2 kreće udesno brzinom v_2, a onda za brod 1 postoje dvije mogućnosti : kretanje ulijevo ili kretanje udesno. Ako se brod 1 kreće ulijevo onda se za promatrača u brodu 1 promatrač na Zemlji kreće brzinom v_1' udesno, a brod 2 brzinom $v_2' > v_1'$ udesno, tj. očito je da se brod 1 mora kretati udesno kako bi se za promatrača u njemu činilo da promatrač na Zemlji i brod 2 imaju jednake iznose brzina. [**2 boda**]
b.) Kako bi bio ispunjen već spomenuti uvjet logično je da mora vrijediti $v_2 > v_1$ jer za promatrača u brodu 1 promatrač na Zemlji ima brzinu v_1, pa bi mu brod 2 imao brzinu $v_2' < v_1$ kada bi vrijedilo $v_1 > v_2$. Drugim riječima faktor kontrakcije duljine je veći za brod 2, tj. promatraču na Zemlji se čini da je brod 2 kraći od broda 1. [**2 boda**]



c.) S obzirom da se brod 2 promatraču na Zemlji čini dvostruko kraćim (a duljine brodova u mirovanju su jednake) vrijedi:

$$2\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \ \Rightarrow\ 4v_2^2 - v_1^2 = 3c^2. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{18}$$

Nadalje, za brod 2 iznos brzine promatrača na Zemlji je v_1, pa je iznos brzine broda 2 promatraču u brodu 1 također v_1, tj. vrijedi (zbog relativističkog zbrajanja brzina):

$$v_2' = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} = v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{2v_1}{1 + \frac{v_1^2}{c^2}}. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{19}$$

Uvrštavanjem (19) u (18) i sređivanjem dolazimo do:

$$\frac{v_1^6}{c^6} + 5\,\frac{v_1^4}{c^4} - 9\,\frac{v_1^2}{c^2} + 3 = 0. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{20}$$

Uvođenjem pokrate $\beta = v_1^2/c^2$ dobivamo običnu kubnu jednadžbu:

$$\beta^3 + 5\beta^2 - 9\beta + 3 = 0. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{21}$$

Dakle, dati 2 boda ako se izraz svede na kubnu jednadžbu, a 1 bod ako se samo (19) uvrsti u (18) i sredi na oblik ekvivalentan jednadžbi (20).

Jedno očekivano, iako nefizikalno, rješenje jednadžbe je $v_1 = c$ (jer su tada obje duljine brodova "0", a brzine naspram broda 2 jednake c, pa su u načelu oba uvjeta zadatka ispunjena). Djeljenjem polinoma sa $(\beta - 1)$ preostaje:

$$\beta^2 + 6\beta - 3 = 0. \tag{22}$$

Fizikalno smisleno rješenje je $\beta = 2\sqrt{3} - 3$, tj. slijedi:

$$v_1 = c\sqrt{2\sqrt{3} - 3} \approx 0.68c. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{23}$$

Uvrštavanjem u (18) slijedi:

$$v_2 = c\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0.93c. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{24}$$

Treba priznati sve bodove i ako je jedn. (21) riješena kalkulatorom, ali samo ako je krajnje odabrano rješenje fizikalno ispravno.

4. zadatak *(10 bodova)*

a.) Koristeći Planckov zakon zračenja slijedi:

$$\lambda_1^{-5}\left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda_1 kT}\right) - 1\right]^{-1} = \lambda_2^{-5}\left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda_2 kT}\right) - 1\right]^{-1}. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{25}$$

Korištenjem pokrate $\alpha = \exp(hc/2\lambda_1 kT)$, uvrštavanjem $\lambda_2 = 2\lambda_1$ i preuređivanjem slijedi:

$$\alpha^2 - 32\alpha + 31 = 0. \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{26}$$

Fizikalno rješenje je $\alpha = 31$. Nadalje korištenjem Wienovog zakona $\lambda_{max} T = b$ slijedi:

$$\exp\left(\frac{hc\lambda_{max}}{2\lambda_1 kb}\right) = 31. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{27}$$

Koristimo drugi uvjet zadatka $\lambda_1 = \lambda_{max} - \Delta\lambda$, gdje je $\Delta\lambda = 160\,\text{nm}$. Tada slijedi:

$$\lambda_{max} = \frac{2\Delta\lambda\, kb \ln 31}{2kb\ln 31 - hc} = 577.48\,\text{nm}. \quad [\mathbf{1\,bod\,za\,formulu + 1\,bod\,za\,rezultat}] \tag{28}$$

Temperatura površine je onda jednostavno:

$$T = \frac{b}{\lambda_{max}} = 5017.96\,\text{K}. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{29}$$

b.) Zvijezda gubi energiju zračenjem koju mora nadoknaditi kako bi temperatura površine bila konstantna, pa slijedi:

$$\sigma S T^4 = \frac{\Delta m\, c^2}{\Delta t}. \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{30}$$

Na lijevoj strani je izražena snaga zračenja (Stefan-Boltzmannov zakon), a desna strana je posljedica ekvivalencije mase i energije. Uvrštavanjem izraza za površinu oplošja kugle $S = 4R^2\pi$ i preuređivanjem (30) lako možemo dobiti:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{4R^2\pi\sigma T^4}{c^2} = 2.85 \times 10^{10}\,\mathrm{kg\,s^{-1}}. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{31}$$

5. zadatak *(10 bodova)*

a.) S obzirom da se vozilo kreće nekom brzinom v naspram uređaja promatrač u vozilu bi detektirao frekvenciju radiovalova:

$$f' = f\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}, \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{32}$$

zbog relativističkog Dopplerovog efekta. Radiovalovi se onda reflektiraju od vozila čime je vozilo efektivno izvor radiovalova frekvencije f' (za promatrače koji miruju u sustavu vozila) **[2 boda]**, tj. do uređaja dolazi signal frekvencije f'':

$$f'' = f'\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = f\,\frac{c+v}{c-v}. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{33}$$

Frekvencijski pomak je tada:

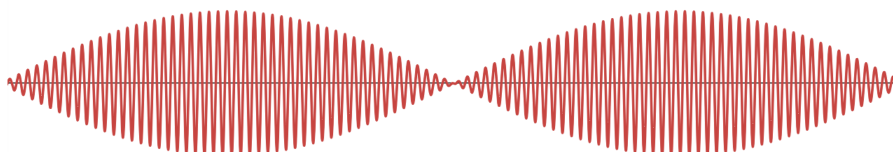
$$\Delta f = f'' - f = f\left(\frac{c+v}{c-v} - 1\right) \approx \frac{2v}{c}\,f. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{34}$$

Tri boda manje ako se uzme izraz (32) za detektiranu frekvenciju umjesto izraza (33).

b.) Ako detektiranom signalu dodamo signal iste amplitude frekvencije emitera, onda je ukupni signal:

$$Y(t) = I_0\cos(2\pi f t) + I_0\cos[2\pi(f+\Delta f)t] = 2I_0\cos\left[2\pi\left(f + \frac{\Delta f}{2}\right)t\right]\cos(\pi\Delta f\, t). \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{35}$$

Imamo "brzo" titranje frekvencijom $f + \Delta f/2$ i "sporo" titranje frekvencijom $\Delta f/2$ kao na slici dolje.



Usrednjavanjem apsolutne vrijednosti gdje je vrijeme usrednjavanja puno manje od perioda sporog titranja, ali puno veće od perioda brzog titranja jedino što će se efektivno usrednjiti je brzo titranje, tj. nakon usrednjenja signal je dan sa:

$$\langle Y(t)\rangle_\tau = \frac{4I_0}{\pi}\,|\cos(\pi\Delta f t)|, \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{36}$$

gdje je $2/\pi$ faktor koji proizlazi iz usrednjavanja brze komponente.

U rezultatu je bitno imati točan izraz za oscilatornu komponentu, a vrijednost predfaktora je nebitna. Bitno je primjetiti da je zbog apsolutne vrijednosti frekvencija usrednjenog signala jednaka Δf, pa ako uređaj izbroji 5000 maksimuma u sekundi slijedi iz (34):

$$v = \frac{\Delta f}{f}\,\frac{c}{2} = \frac{5000\,\mathrm{Hz}}{20 \times 10^9\,\mathrm{Hz}}\,\frac{3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{2} = 37.5\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 135\,\mathrm{km\,h^{-1}}. \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{37}$$